Musterlösung für Aufgabe 26

26. Aufgabe: V und W seien endlichdimensionale K–Vektorräume.

a) $f : V \longrightarrow W$ sei ein K–Monomorphismus. Beweise, daß es einen K–Epimorphismus $g : W \longrightarrow V$ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$. (**Hinweis:** Lineare Fortsetzung)

b) $f : V \longrightarrow W$ sei ein K–Epimorphismus. Beweise, daß es einen K–Monomorphismus $h : W \longrightarrow V$ gibt mit $f \circ h = \mathrm{id}_W$.

Lösung:

a) Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Da f ein Monomorphismus ist, ist $f(B) = \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ nach (17.30a) linear unabhängig. Ergänze $f(B)$ zu einer Basis

$$C = \{\underbrace{f(v_1)}_{=:w_1}, \ldots, \underbrace{f(v_n)}_{=:w_n}, w_{n+1}, \ldots, w_m\}$$

von W. Definiere $g : W \longrightarrow V$ durch lineare Fortsetzung auf der Basis C von W durch

$$g(w_i) := \begin{cases} v_i & \text{für } i = 1, 2, \ldots, n \quad (f(v_i) = w_i) \\ o_W & \text{für } i = n+1, \ldots, m \end{cases}$$

Dadurch ist eine K–lineare Abbildung $g : W \longrightarrow V$ erklärt. Es folgt

$$(g \circ f)(v_i) = g(f(v_i)) = g(w_i) = v_i = \mathrm{id}_V(v_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Damit gilt $(g \circ f)|B = \mathrm{id}_V|B$, woraus sich mit (17.32) $\boxed{g \circ f = \mathrm{id}_V}$ ergibt. Nach (17.11c) ist g ein Epimorphismus.

b) Sei $D = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von W. Da f ein Epimorphismus ist, besitzt jedes w_i mindestens ein Urbild unter f. Wähle zu jedem w_i genau ein $v_i \in V$ mit $f(v_i) = w_i$. Definiere durch lineare Fortsetzung eine K–lineare Abbildung $h : W \longrightarrow V$ mit $h(w_i) = v_i$ $(i = 1, \ldots, m)$

$$(f \circ h)(w_i) = f(h(w_i)) = f(v_i) = w_i = \mathrm{id}_V(w_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Damit gilt $(f \circ h)|D = \mathrm{id}_W|D$, woraus sich mit (17.32) $\boxed{f \circ h = \mathrm{id}_W}$ ergibt. Nach (17.11c) ist h ein Monomorphismus.