5. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)

Abgabe: Donnerstag, 19.5.2005, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1+4 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 2+3 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

17. Aufgabe: Auf der Menge $V := \mathbb{R}_{>0}$ der positiven reellen Zahlen wird eine Addition $\sharp$ definiert durch

$$r \sharp s \ := \ r \cdot s \quad (r, s \in V)$$

und eine Skalarmultiplikation $*$ mit Zahlen aus dem Körper $\mathbb{Q}$ durch

$$q * r \ := \ r^q \quad (q \in \mathbb{Q}\,,\ \mathrm{r} \in \mathrm{V})$$

(Man mache sich klar, wie r^q definiert ist!). Beweise, daß $(V, \sharp, *)$ ein $\mathbb{Q}$–Vektorraum ist. (3)

18. Aufgabe: Die Abbildung $k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sei für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ definiert durch $k(z) := \overline{z}$ (konjugiert komplexe Zahl von z).

a) Beweise, daß k eine bijektive $\mathbb{R}$–lineare Abbildung ist (also ein $\mathbb{R}$–Isomorphismus). Bestimme die Umkehrabbildung von k.

b) Untersuche, ob die Abbildung k auch $\mathbb{C}$–linear ist. (3)

19. Aufgabe: a) Sei K ein Körper und U ein Unterkörper von K. Beweise, daß K ein Vektorraum über U ist.

b) Sei $K := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Es ist bekannt, daß K ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist. Begründe, daß K ein $\mathbb{Q}$–Vektorraum ist und bestimme dessen Dimension. (3)

20. Aufgabe: Untersuche in den folgenden Fällen, ob die Abbildung f $\mathbb{R}$–linear, injektiv oder surjektiv ist. Gib im Falle der Bijektivität auch die Umkehrabbildung an.

a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$ **b)** $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_3 + 1 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ **c)** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \ , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (6)

***21. Aufgabe:** Sei $(G, \star)$ eine endliche Gruppe. Beweise, daß es eine injektive Abbildung $\omega : G \longrightarrow S_G$ gibt, für die gilt: $\omega(a \star b) = \omega(a) \circ \omega(b) \quad (\forall\, a, b \in G)$ (Diese letzte Bedingung besagt, daß ω ein "Gruppenhomomorphismus" ist). Untersuche, ob der Fall eintreten kann, daß ω surjektiv ist. (3*)
