4. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)

Abgabe: Donnerstag, 12.5.2005, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1+4 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 2+3 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

13. Aufgabe: a) Seien R ein Ring und I, J Ideale in R. Beweise: Dann sind auch $I \cap J$ und $I + J := \{a + b \mid a \in I\,,\, b \in J\}$ Ideale in R.

b) Beweise: Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt: $(a) = (b) \iff |a| = |b|$.

c) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Beweise, daß es genau eine ganze Zahl $g \geq 0$ gibt mit $(a) + (b) = (g)$.

d) Die **Teilbarkeitsrelation | auf $\mathbb{Z}$** sei definiert durch

$$\boldsymbol{a|b \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z} \;:\; ak = b}$$

Beweise: **1)** $a|b \iff (a) \supseteq (b)$

2) Die Zahl g aus c) erfüllt die folgenden Bedingungen:

- **i)** $g|a$ und $g|b$ (d.h. g ist ein gemeinsamer Teiler von a und b)
- **ii)** $\forall\, t \in \mathbb{Z} \,:\, (t|a \wedge t|b) \implies t|g$ (d.h. g wird von jedem gemeinsamen Teiler von a und b geteilt).

Definition: Die Zahl $g \geq 0$ mit i) und ii) heißt **größter gemeinsamer Teiler (ggT) von a und b**.

Fazit: In dieser Aufgabe wird bewiesen, daß zu je zwei ganzen Zahlen a und b der eindeutig bestimmte ggT existiert und daß sich dieser als Linearkombination von a und b mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen läßt. (8)

14. Aufgabe: Beweise: **a)** Ist U ein Unterkörper von $\mathbb{R}$, so folgt $\mathbb{Q} \subseteq \mathrm{U}$.

b) Der Durchschnitt über alle Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist gleich $\mathbb{Q}$

Definition: Der Durchschnitt $P(K)$ über alle Unterkörper eines Körpers K heißt der **Primkörper** von K.

c) $P(\mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$ für jede Primzahl p. (4)

15. Aufgabe: Beweise:

a) In einem IB R gilt die folgende Kürzungsregel: $\forall\, x, y, z \in R \,:\, (xz = yz \wedge z \neq 0) \implies x = y$

b) Jeder endliche Integritätsbereich R ist ein Körper. (4)

***16. Aufgabe:** Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

Für ein Element $\omega \in K$ seien die Verknüpfungen $\oplus, \odot_\omega$ auf $L := K \times K$ definiert durch

$$(a, b) \oplus (c, d) := (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \odot_\omega (c, d) := (ac + \omega bd, ad + bc)$$

Charakterisiere diejenigen Elemente $\omega \in K$, für die $(L, \oplus, \odot_\omega)$ ein Körper ist. (Es ist also eine notwendige und hinreichende Bedingung für ω zu finden und zu beweisen, so daß $(L, \oplus, \odot_\omega)$ ein Körper ist!) (3*)
