3. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)

Abgabe: Mittwoch, 4.5.2005, bis 15.00 Uhr

Gruppen 1+4 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 2+3 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

9. Aufgabe: $(G, \star)$ sei eine Gruppe.

a) Beweise, daß eine Teilmenge $U \subseteq G$ genau dann eine Untergruppe von $(G, \star)$ ist, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind: **i)** $U \neq \emptyset$, **ii)** $\forall\, a, b \in U : a \star \overline{b} \in U$.

b) Beweise, daß der Durchschnitt zweier Untergruppen U und V von $(G, \star)$ wieder eine Untergruppe von $(G, \star)$ ist.

c) Untersuche, ob die Vereinigung zweier Untergruppen von $(G, \star)$ wieder eine Untergruppe von $(G, \star)$ sein muß . Wenn nicht, finde eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür und beweise diese. (5)

10. Aufgabe: Stelle alle möglichen Gruppentafeln für eine Gruppe mit 4 Elementen auf. Welche gruppentheoretische Eigenschaft läßt sich daraus für jede Gruppe mit 4 Elementen ablesen? (3)

11. Aufgabe: a) Beweise, daß die Menge $A := \mathcal{A}(M, \mathbb{R})$ $(\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R})$ aller Abbildungen (Funktionen) von M nach $\mathbb{R}$ ein kommutativer Ring ist. Dabei sind die Verknüpfungen argumentweise definiert. Bestimme alle Einheiten in dem Ring A. Ist A nullteilerfrei?

b) Es sei N eine beliebige nichtleere Menge. Auf der Menge $\mathcal{P}(N)$ sei die Verknüpfung $\star$ aus Aufg. 5b) die Addition und die Durchschnittsbildung die Multiplikation. Beweise, daß $(\mathcal{P}(N), \star, \cap)$ ein kommutativer Ring ist. Bestimme alle Einheiten in diesem Ring. Ist dieser Ring nullteilerfrei? (8)

***12. Aufgabe: a)** $(G, \star)$ sei eine Gruppe. mit $a \star a = e$ für alle $a \in G$. Beweise, daß $(G, \star)$ eine abelsche Gruppe ist.

b) Es sei H eine nichtleere endliche Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $\star$. In $(H, \star)$ sollen die Kürzungsregeln gelten. Beweise, daß $(H, \star)$ eine Gruppe ist.

Hinweis: Für jedes $a \in H$ gilt $H = \{a \star x \mid x \in H\}$ (wieso?) (3*)
