2. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)

Abgabe: Do. 28.4.2005, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1+4 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 2+3 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

5. Aufgabe: Untersuche in den folgenden Fällen, ob die Verknüpfung $\star$ auf der Menge M

i) assoziativ ist

ii) kommutativ ist

iii) ein neutrales Element besitzt

und bestimme alle bzgl. $\star$ invertierbaren Elemente aus M, falls die Antwort in iii) ja lautet:

a) $M := \mathbb{Z}$ und $x \star y := x + y - xy \quad (\forall\, x, y \in M)$

b) $M := \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $U \star V := (U \cup V) \setminus (U \cap V) \quad (\forall\, U, V \in M)$

c) $M := \mathbb{R}$ und $x * y := \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\forall\, x, y \in M)$. (7)

6. Aufgabe: Sei $(M, \star)$ eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung. Für $x \in M$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ sei die n–te Potenz x^n von x rekursiv definiert durch

$$\begin{aligned} x^1 &:= x \\ x^n &:= x^{n-1} \star x \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

Beweise: $\quad x^m \star x^n = x^{m+n} \quad$ für alle $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

Hinweis: Führe Induktion nach n bei festgehaltenem m. (3)

7. Aufgabe: Stelle die Verknüpfungstafeln von

a) $(\mathbb{Z}_6, \odot)$ und **b)** $(\mathbb{Z}_7, \odot)$ auf.

Bestimme in beiden Fällen alle Elemente, die bzgl. $\odot$ invertierbar sind. (4)

8. Aufgabe: Sei $(M, \star)$ eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $\star$ und einem bzgl. $\star$ neutralen Element $e \in M$. Beweise: Die Menge $\mathrm{I}(M)$ der bzgl. $\star$ invertierbaren Elemente aus M ist eine Gruppe bzgl. $\star$. (2)
