13. Übungsblatt

**LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)**

# Abgabe: Donnerstag, 14.7.2005, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1+4 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 2+3 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

**58. Aufgabe:** Sei $K$ ein Körper. Beweise, daß der Polynomring $K[T]$ ein Hauptidealbereich ist. (**Hinweis:** Der Beweis kann analog zu dem von (15.28) geführt werden. Zeige u.a., daß ein Ideal $0 \neq I \subseteq K[T]$ von einem Polynom kleinsten Grades in $I$ erzeugt wird.) (3)

**59. Aufgabe:** Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein idempotenter Endomorphismus. Beweise:

**a)** $\lambda \in K$ Eigenwert von $f \quad \Longrightarrow \quad \lambda \in \{0,1\}$

**b)** Untersuche, ob in a) auch die Umkehrung gilt

**c)** $V \;=\; \mathrm{Eig}(f,0) \oplus \mathrm{Eig}(f,1)$ (4)

**60. Aufgabe:** Sei $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix (d.h. ${}^tM = M$). Beweise:

**a)** Das charakteristische Polynom von $M$ zerfällt in $\mathbb{R}[T]$ in Linearfaktoren.

**b)** $M$ ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix. (3)

**61. Aufgabe:** Die Matrix $M \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ besitze das charakteristische Polynom $p_M = T^4 - 7T^3 + 17T^2 - 17T + 6$ . Berechne:

**a)** $\det(M^2)$ **b)** $Sp(M^3)$ (3)

**62. Aufgabe:** Die Matrix $M = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ sei definiert durch $a_{ik} := 1$ $(\forall\, i,k = 1,2,\ldots,n)$. Untersuche, ob $M$ trigonalisierbar ist. (3)

***63. Aufgabe:** $V$ sei ein $n$–dimensionaler $K$–Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ . Beweise:

**a)** Ist $f$ nilpotent, so ist 0 einziger EW von $f$ .

**b)** Sei $m \in \mathbb{N}$. Gilt $f^m = o$ und $f^{m-1}(v) \neq o$ für ein $v \in V$, so ist die Menge $\{v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{m-1}(v)\}$ linear unabhängig.

**c)** Folgende Aussagen sind äquivalent:

**i)** $f$ ist nilpotent.

**ii)** Es gibt eine $f$–invariante Fahne $(U_i)$ von $V$ mit der zusätzlichen Eigenschaft $f(U_i) \subseteq U_{i-1}$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$

**iii)** Es gibt eine Basis $B$ von $V$, so daß $\mathrm{M}_B^B(f)$ eine strikt obere Dreiecksmatrix ist (d.h. es sind auch noch alle Hauptdiagonalelemente gleich 0 ) . (5*)

---

**Internet:** http://math–www.uni–paderborn.de/˜ chris

## Klausurtermin: 26.7.2005, 8.30–11.30 Uhr