13. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)

Abgabe: Donnerstag, 14.7.2005, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1+4 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 2+3 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

58. Aufgabe: Sei K ein Körper. Beweise, daß der Polynomring $K[T]$ ein Hauptidealbereich ist. (**Hinweis:** Der Beweis kann analog zu dem von (15.28) geführt werden. Zeige u.a., daß ein Ideal $0 \neq I \subseteq K[T]$ von einem Polynom kleinsten Grades in I erzeugt wird.) (3)

59. Aufgabe: Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein idempotenter Endomorphismus. Beweise:

a) $\lambda \in K$ Eigenwert von $f \quad \Longrightarrow \quad \lambda \in \{0, 1\}$

b) Untersuche, ob in a) auch die Umkehrung gilt

c) $V \;=\; \mathrm{Eig}(f, 0) \oplus \mathrm{Eig}(f, 1)$ (4)

60. Aufgabe: Sei $M \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix (d.h. ${}^tM = M$) . Beweise:

a) Das charakteristische Polynom von M zerfällt in $\mathbb{R}[T]$ in Linearfaktoren.

b) M ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix . (3)

61. Aufgabe: Die Matrix $M \in \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$ besitze das charakteristische Polynom $p_M = T^4 - 7T^3 + 17T^2 - 17T + 6$. Berechne:

a) $\det(M^2)$ **b)** $Sp(M^3)$ (3)

62. Aufgabe: Die Matrix $M = (a_{ik}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ sei definiert durch $a_{ik} := 1$ $(\forall\, i, k = 1, 2, \ldots, n)$. Untersuche, ob M trigonalisierbar ist. (3)

***63. Aufgabe:** V sei ein n–dimensionaler K–Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Beweise:

a) Ist f nilpotent, so ist 0 einziger EW von f .

b) Sei $m \in \mathbb{N}$. Gilt $f^m = o$ und $f^{m-1}(v) \neq o$ für ein $v \in V$, so ist die Menge $\{v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{m-1}(v)\}$ linear unabhängig.

c) Folgende Aussagen sind äquivalent:

i) f ist nilpotent.

ii) Es gibt eine f–invariante Fahne (U_i) von V mit der zusätzlichen Eigenschaft $f(U_i) \subseteq U_{i-1}$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$

iii) Es gibt eine Basis B von V, so daß $\mathrm{M}_B^B(f)$ eine strikt obere Dreiecksmatrix ist (d.h. es sind auch noch alle Hauptdiagonalelemente gleich 0) . (5*)

Internet: http://math–www.uni–paderborn.de/~ chris

Klausurtermin: 26.7.2005, 8.30–11.30 Uhr