1. Übungsblatt

# LINEARE ALGEBRA II (SS 2005)

**Abgabe: Fr. 22.4.2005, bis 11.00 Uhr**

Gruppen 1+4 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 2+3 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

**1. Aufgabe:** Sei $A$ der Vektorraum $\mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Dabei sind die Rechenoperationen argumentweise definiert. Ferner sei $U$ der von $\{\cos, \sin\}$ erzeugte Unterraum von $A$.

**a)** Untersuche, ob die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := \sin(x+2)$ für $x \in \mathbb{R}$, ein Element aus $U$ ist.

**b)** Bestimme die Dimension von $U$. (3)

**2. Aufgabe:** Sei $(V, \langle\,,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. $U \subseteq V$ sei ein Untervektorraum, und $U^\perp := \{v \mid v \in V, v \perp U\}$ bezeichne das orthogonale Komplement von $U$ in $V$. Beweise:

**a)** $U^\perp$ ist ein Untervektorraum von $V$. **b)** $U \cap U^\perp = O$

**c)** $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ **d)** $\dim_{\mathbf{R}}(V) < \infty \implies U = (U^\perp)^\perp$. (5)

**3. Aufgabe:** $(V, \langle\,,\rangle)$ sei ein euklidischer Vektorraum mit der durch das Skalarprodukt induzierten Norm $||\ ||$. Beweise das Parallelogramm Gesetz: $||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2(||v||^2 + ||w||^2)$ für alle $v, w \in V$. Gib für die Ebene eine anschauliche Interpretation dieses Gesetzes, die den Namen rechtfertigt. (2)

**4. Aufgabe:** Seien $s_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, s_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Der $\mathbb{R}^4$ sei mit dem kanonischen Skalarprodukt versehen. **a)** Beweise, daß $S = \{s_1, s_2\}$ ein ONS in $\mathbb{R}^4$ ist.

**b)** Ergänze $S$ durch Vektoren aus $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ zu einer Basis $B$ von $\mathbb{R}^4$ und führe für $B$ das Orthonormalisierungsverfahren von E.Schmidt durch. (4)

**5*. Aufgabe:** Es soll die Frage untersucht werden, ob jede Norm durch ein Skalarprodukt induziert wird. Die Abbildung $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei definiert durch

$$N(v) := max\{\, |a_i| \mid i = 1, 2, \ldots, n\,\} \text{ für } v = \begin{pmatrix}a_1\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

**a)** Beweise: $N$ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

**b)** Untersuche, ob es ein Skalarprodukt $s$ auf $\mathbb{R}^n$ gibt mit $N(v) = \sqrt{s(v,v)}$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. (4*)

## Literaturhinweise

Albrecht Beutelspacher: “Lineare Algebra”
Gerd Fischer: “Lineare Algebra”
Klaus Jänich: “Lineare Algebra”
Max Koecher: “Lineare Algebra und Analytische Geometrie”

In der **Bibliothek** gibt es in der Mathematik–Abteilung die Systemgruppe **TDQ** mit Büchern aus dem Bereich der Linearen Algebra. Es lohnt sich auf jeden Fall, dort herumzustöbern und sich Bücher nach eigenem Geschmack auszusuchen und auch darin zu lesen!

Außerdem finden Sie in dem **Semesterapparat Nr. 15** zu dieser Vorlesung neben den oben angegebenen noch weitere nützliche Bücher. Die Bücher aus einem Semesterapparat müssen in der Bibliothek verbleiben und können nur über das Wochenende ausgeliehen werden

**Internet:** http://math-www.uni-paderborn.de/˜ chris