21.10.2004

§ 2 Logik

Aussagenlogik

(2.1) DEF: Verknüpfungen von Aussagen

a) Disjunktion: $\mathbf{A \vee B}$

"A oder B"

(nicht ausschließendes "oder")

A	B	$A \vee B$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

b) Konjunktion: $\mathbf{A \wedge B}$

"A und B"

A	B	$A \wedge B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

c) Negation: $\mathbf{\neg A}$

"nicht A"

A	$\neg A$
W	F
F	W

d) Implikation: $\mathbf{A \Longrightarrow B}$

"wenn A, dann B"

oder: "aus A folgt B"

A	B	$A \Longrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

e) Äquivalenz: $\mathbf{A \Longleftrightarrow B}$

"wenn A, dann B und umgekehrt"

oder: "A genau dann, wenn B"

oder: "A dann und nur dann, wenn B"

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

(2.2) DEF: a) Eine logische Formel $\boldsymbol{P}$ heißt **allgemeingültig**, wenn sie nur den Wahrheitswert $\boldsymbol{W}$ annimmt.

b) Zwei logische Formeln $\boldsymbol{P}$ und $\boldsymbol{Q}$ heißen **logisch äquivalent**, wenn die Äquivalenz $\boldsymbol{P} \Longleftrightarrow \boldsymbol{Q}$ allgemeingültig ist.

(2.3) SATZ: Formeln für $\neg$, $\vee$ und $\wedge$

$\boldsymbol{P, Q}$ und $\boldsymbol{R}$ seien beliebige logische Formeln. Dann sind die folgenden logischen Formeln allgemeingültig:

a) $\boldsymbol{P \vee (\neg P)}$ **b)** $\boldsymbol{\neg(P \wedge \neg P)}$ **c)** $\boldsymbol{\neg(\neg P) \iff P}$ ($\surd$)

d) $\boldsymbol{P \wedge Q \iff Q \wedge P}$, $\boldsymbol{P \vee Q \iff Q \vee P}$ **(Kommutativgesetze)**

e) $\boldsymbol{(P \wedge Q) \wedge R \iff P \wedge (Q \wedge R)}$, $\boldsymbol{(P \vee Q) \vee R \iff P \vee (Q \vee R)}$ **(Assoziativgesetze)**

f) $\boldsymbol{\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)}$ ($\surd$) , $\boldsymbol{\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)}$ (A) **(Regeln von de Morgan)**

g) $\boldsymbol{P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}$
$\boldsymbol{P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)}$ **(Distributivgesetze)**

Ein Beweis wird mit Hilfe von Wahrheitstafeln geführt.

(2.4) SATZ: Formeln für die Implikation

$\boldsymbol{P, Q}$ und $\boldsymbol{R}$ seien beliebige logische Formeln. Dann sind die folgenden logischen Formeln allgemeingültig:

a) $\boldsymbol{(P \iff Q) \iff [(P \implies Q) \wedge (Q \implies P)]}$

b) $\boldsymbol{[(P \implies Q) \wedge (Q \implies R)] \implies (P \implies R)}$ **(Transitivität)** ($\surd$)

c) $\boldsymbol{(P \implies Q) \iff (\neg P \vee Q)}$ ($\surd$)

d) $\boldsymbol{(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P)}$ **(Kontraposition)** ($\surd$)

e) $\boldsymbol{(P \implies Q) \iff [(P \wedge \neg Q) \implies \neg P]}$ ($\surd$)

f) $\boldsymbol{(P \implies Q) \iff [(P \wedge \neg Q) \implies Q]}$

g) $\boldsymbol{(P \implies Q) \iff [(P \wedge \neg Q) \implies (R \wedge \neg R)]}$

Ein Beweis wird mit Hilfe von Wahrheitstafeln oder durch **äquivalentes Umformen** geführt. Etwa für (2.4b):

P	**Q**	**R**	$\mathbf{P{\Longrightarrow}Q}$	$\mathbf{Q{\Longrightarrow}R}$	$\mathbf{P{\Longrightarrow}Q \wedge Q{\Longrightarrow}R}$	$\mathbf{P{\Longrightarrow}R}$	$\mathbf{(P{\Longrightarrow}Q \wedge Q{\Longrightarrow}R) \Longrightarrow (P{\Longrightarrow}R)}$
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F	W
W	F	W	F	W	F	W	W
W	F	F	F	W	F	F	W
F	W	W	W	W	W	W	W
F	W	F	W	F	F	W	W
F	F	W	W	W	W	W	W
F	F	F	W	W	W	W	W

Die Formeln e),f) und g) sind Grundlage für die **indirekte Beweisführung**.

(2.5) BEM: Beispiele für eine indirekte Beweisführung:

a) $\boldsymbol{a \in \mathbb{Z}}$, $\boldsymbol{a^2}$ gerade $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{a}$ gerade $(\surd)$

b) $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ ist eine irrationale Zahl $(\surd)$

25.10.2004

c) Um die Implikation $\boldsymbol{P \Longrightarrow Q}$ mit Hilfe eines **indirekten Beweises** nachzuweisen, nehmen wir das logische Gegenteil von $\boldsymbol{Q}$ an und leiten aus dieser Annahme einen **Widerspruch** her. Wir gehen also von $\boldsymbol{P \wedge \neg Q}$ aus und folgern daraus $\boldsymbol{\neg P}$, $\boldsymbol{Q}$ oder $\boldsymbol{R \wedge \neg R}$ für eine geeignete Aussage $\boldsymbol{R}$. Auf Grund von (2.4e), f) bzw. g) ist dann die Implikation $\boldsymbol{P \Longrightarrow Q}$ gültig.

Prädikatenlogik

Es sei $\boldsymbol{A(x)}$ ein Prädikat. Beim Einsetzen von Werten für $\boldsymbol{x}$, die aus einem bestimmten Bereich stammen können, wird aus $\boldsymbol{A(x)}$ eine Aussage, die dann entweder wahr oder falsch ist.

(2.6) DEF: (Quantoren)

Bezeichnung	Bedeutung
$\forall\, \boldsymbol{x : A(x)}$	für alle $\boldsymbol{x}$ gilt $\boldsymbol{A(x)}$
$\forall\, \boldsymbol{x \in M : A(x)}$	für alle Elemente $\boldsymbol{x}$ aus einer Menge $\boldsymbol{M}$ gilt $\boldsymbol{A(x)}$
$\exists\, \boldsymbol{x : A(x)}$	es gibt ein $\boldsymbol{x}$, für das $\boldsymbol{A(x)}$ gilt
$\exists\, \boldsymbol{x \in M : A(x)}$	es gibt ein Element $\boldsymbol{x}$ aus einer Menge $\boldsymbol{M}$, für das $\boldsymbol{A(x)}$ gilt

(2.7) SATZ: Negation von Formeln mit $\forall$ und $\exists$

a) $\boldsymbol{\neg(\forall\, x : A(x)) \iff (\exists\, x : \neg A(x))}$

b) $\boldsymbol{\neg(\exists\, x : A(x)) \iff (\forall\, x : \neg A(x))}$