§ 12 Erzeugendensysteme und Basen von Vektorräumen

(12.1) DEF: V sei ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

a) Eine Teilmenge $E \subseteq V$ heißt ein **Erzeugendensystem (**abgekürzt **EZS) von** V, wenn gilt

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E) = V$$

b) V heißt **endlich erzeugbar**, wenn V ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

(12.2) BEM: a) Ist E ein EZS von V, so läßt sich jeder Vektor aus V als Linearkombination von endlich vielen Vektoren aus E darstellen (nicht notwendig eindeutig).

b) Es gilt immer $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(V) = V$ (d.h. V ist ein EZS von V).

c) Ist E ein EZS von V, so ist auch jede Teilmenge F mit $E \subseteq F \subseteq V$ ein EZS von V.

d) Ist V endlich erzeugbar , so muß nicht jedes EZS von V endlich sein.

e) $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\emptyset) \; = \; \{o_V\} \; = \; \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(o_V)$.

(12.3) BEISPIELE: a) Die Menge der Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$ ist ein (endliches) EZS von $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ ist also endlich erzeugbar.

b) Die Menge der Basismatrizen ist ein (endliches) EZS von $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, d.h. $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ist endlich erzeugbar .

c) Die Menge $\mathcal{E}$ der Folgen ε_i $(i \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$ aus $\mathcal{F}_0(\mathbb{R})$, die die Glieder δ_{ik} an der k–ten Stelle haben, ist ein (unendliches) EZS des Vektorraumes $\mathcal{F}_0(\mathbb{R})$.

d) Der Vektorraum $\mathcal{F}_0(\mathbb{R})$ ist nicht endlich erzeugbar.

(12.4) LEMMA: Seien $E \subseteq V$, $v \in V \setminus E$ und $F := E \cup \{v\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(F) \; = \; \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$ **b)** $v \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E)$.

(12.5) SATZ: Sei $T = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ eine endliche Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) T ist linear abhängig.

b) Es gibt ein $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $v_k \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(v_1, \ldots, \hat{v}_k, \ldots, v_n)$.

(12.6) FOLG: Eine endliche Teilmenge $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{V}$ ist genau dann linear unabhängig , wenn sich kein Vektor aus $\boldsymbol{T}$ als Linearkombination der übrigen Vektoren aus $\boldsymbol{T}$ darstellen läßt.

(12.7) DEF: Seien $\boldsymbol{V}$ ein Vektorraum und $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{V}$ eine beliebige Teilmenge.

a) $\boldsymbol{T}$ heißt **linear abhängig**, wenn gilt

- **i)** $\boldsymbol{T} \neq \emptyset$
- **ii)** Es gibt ein $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{T}$ mit $\boldsymbol{v} \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{T} \setminus \{v\})$.

b) $\boldsymbol{T}$ heißt **linear unabhängig**, wenn $\boldsymbol{T}$ nicht linear abhängig ist.

(12.8) BEM:

a) $\boldsymbol{T}$ linear abhängig $\iff$ es gibt ein $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{T}$ und (endlich viele) Vektoren $\boldsymbol{v_1, \ldots, v_n} \in \boldsymbol{T} \setminus \{v\}$ mit $\boldsymbol{v} \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{v_1, \ldots, v_n})$

$\iff$ es gibt eine endliche linear abhängige Teilmenge von $\boldsymbol{T}$

b) $\boldsymbol{T}$ linear unabhängig $\iff$ entweder $\boldsymbol{T} = \emptyset$ oder $\forall\, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{T} : \boldsymbol{v} \notin \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{T} \setminus \{v\})$.

$\iff$ jede endliche Teilmenge von $\boldsymbol{T}$ ist linear unabhängig .

c) Im Falle einer endlichen Menge stimmt die obige Definition mit der früheren überein

d) Enthält eine Teilmenge $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{V}$ den Nullvektor, so ist $\boldsymbol{T}$ linear abhängig .

(Es gilt dann nämlich $\boldsymbol{o_V} \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{T} \setminus \{\boldsymbol{o_V}\})$)

e) $\boldsymbol{T} = \{v\}$:

$\boldsymbol{T}$ linear unabhängig $\iff$ $v \notin \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\boldsymbol{T} \setminus \{v\}) = \{\boldsymbol{o_V}\}$ $\iff$ $v \neq \boldsymbol{o_V}$

$\boldsymbol{T}$ linear abhängig $\iff$ $v = \boldsymbol{o_V}$

(12.9) BEISPIEL: Die unendliche Menge $\boldsymbol{\mathcal{E}} := \{\, \varepsilon_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \,\} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{F}_0}(\mathbb{R})$ ist linear unabhängig (s. (12.3c))

Ein linear unabhängiges EZS $\boldsymbol{E}$ eines Vektorraumes läßt sich nach (12.4) nicht mehr verkleinern. Sonst müßte ein Vektor aus $\boldsymbol{E}$ eine Linearkombination von anderen Vektoren aus $\boldsymbol{E}$ sein. Wir kommen jetzt zu einer ganz wichtigen Definition:

(12.10) DEF: $\boldsymbol{V}$ sei ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$. Eine Teilmenge $\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{V}$ heißt eine **Basis von $\boldsymbol{V}$**, wenn gilt:

- **i)** $\boldsymbol{B}$ ist linear unabhängig und
- **ii)** $\boldsymbol{B}$ ist ein Erzeugendensystem von $\boldsymbol{V}$.

(12.11) BEISPIELE: **a)** Die Menge $\mathcal{E}_n := \{e_1, \dots, e_n\}$ aus den Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Sie wird die **kanonische Basis von** $\mathbb{R}^n$ genannt. $\mathcal{E}_n$ ist nach (11.8c) linear unabhängig und nach (12.3a) ein EZS von $\mathbb{R}^n$. Es gilt $|\mathcal{E}_n| = n$.

b) Die Teilmengen $\mathcal{E}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sind alles Basen von $\mathbb{R}^3$ (leichtes Nachprüfen!) . Ein Vektorraum hat also i.a. mehrere Basen. Es gilt sogar, daß $\mathbb{R}^3$ unendlich viele Basen besitzt. Später werden wir sehen, daß jede Basis von $\mathbb{R}^3$ genau 3 Elemente enthält.

c) Die Menge $\{ E_{ik} \mid i = 1, \dots, m \, , \, k = 1 \dots, n \}$ der **Basismatrizen** ist eine Basis des Vektorraumes $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (EZS nach (12.3b), linear unabhängig nach den Übungen) . Sie hat $m \cdot n$ Elemente.

d) $\mathcal{E} := \{ \varepsilon_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \} \subseteq \mathcal{F}_0(\mathbb{R})$ ist eine (unendliche) Basis von $\mathcal{F}_0(\mathbb{R})$ (linear unabhängig nach (12.9) und EZS nach (12.3c)) . Eine endliche Basis von $\mathcal{F}_0(\mathbb{R})$ kann es nicht geben, da sonst $\mathcal{F}_0(\mathbb{R})$ im Widerspruch zu (12.3d) endlich erzeugbar wäre.

e) $\emptyset$ ist eine Basis des Nullraumes $O = \{o_V\}$.

(12.12) LEMMA: $T \subseteq V$ sei linear unabhängig und $v \in V \setminus T$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $T \cup \{v\}$ ist linear unabhängig

b) $v \notin \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(T)$.

(12.13) SATZ: Für eine Teilmenge $B \subseteq V$ eines Vektorraumes V sind folgende Aussagen äquivalent:

a) B ist eine Basis von V .

b) B ist eine **maximale** linear unabhängige Teilmenge von V
(d.h. B ist linear unabhängig und jede echte Obermenge von B ist linear abhängig).

c) B ist ein **minimales** Erzeugendensystem von V
(d.h. B ist ein EZS von V und keine echte Teilmenge von B ist ein EZS von V) .

Wir werden im folgenden in erster Linie nur noch endlich erzeugbare Vektorräume untersuchen. Solche Vektorräume haben immer eine endliche Basis.

(12.14) SATZ: Ist E ein endliches Erzeugendensystem eines Vektorraumes V, so enthält E eine (endliche) Basis von V .

(12.15) FOLG: Jeder endlich erzeugbare Vektorraum besitzt eine (endliche) Basis.

(12.16) BEM: Der Vektorraum $\mathcal{F}_0(\mathbb{R})$ ist zwar nicht endlich erzeugbar (12.3d), besitzt aber trotzdem eine (unendliche) Basis (12.11d). Mit transfiniten Methoden (ZORNsches LEMMA), die hier nicht behandelt werden können, läßt sich beweisen, daß jeder Vektorraum eine Basis besitzt.

(12.17) SATZ: Eine Teilmenge $T = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn sich jeder Vektor aus $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(T)$ in eindeutiger Weise als Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ darstellen läßt.

(12.18) FOLG: Eine Teilmenge $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist genau dann eine Basis von V, wenn sich jeder Vektor aus V in eindeutiger Weise als Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ darstellen läßt.

(12.19) LEMMA: Sei $T \subseteq V$ eine endliche Teilmenge und B eine maximale linear unabhängige Teilmenge von T. Dann ist B eine (endliche) Basis des Untervektorraumes $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(T)$.