(10.26) SATZ Der Entzerrungsalgorithmus

Gegeben sei das LGS $Ax = b$ mit $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Ferner gelte $\mathrm{rg}(A|b) = \mathrm{rg}(A) =: r$. Die Treppenmatrix $(T(A), b')$ der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ habe die charakteristischen Indizes $k_1, k_2, \ldots, k_r$, und es sei $\{j_1, j_2, \ldots, j_{n-r}\} := \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$. Durch Einfügen oder Löschen von Nullzeilen in der Matrix $(T(A), b')$ erhält man eine Matrix vom Format $(n, n+1)$, bei der die Einsen der Spalten mit den Indizes $k_1, k_2, \ldots, k_r$ in der Hauptdiagonale stehen. Die Spalten von B seien $w_1, w_2, \ldots, w_n, u$. Setze

$$v_{j_i} := w_{j_i} - e_{j_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n - r)$$

Dann gilt:

a) $u \in \text{Lös}(A, b)$

b) $v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_{n-r}}$ ist eine Basis des Untervektorraumes $\text{Lös}(A, o_m)$

c) Jede Lösung von $Ax = b$ ist von der Form

$$u + \alpha_1 v_{j_1} + +\alpha_2 v_{j_2} + \ldots + +\alpha_{n-r} v_{j_{n-r}}$$

mit reellen Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-r}$.

Beweis: Die Voraussetzung $\mathrm{rg}(A|b) = \mathrm{rg}(A)$ sichert, daß das LGS überhaupt lösbar ist (10.25).

a) Es ist u eine Linearkombination der Spalten $w_1, \ldots, w_n$ und daher nach (10.9) eine Lösung von $T(A)x = b'$ (die eingefügten oder gestrichenen Nullzeilen spielen dabei keine Rolle!) und damit auch von $Ax = b$.

b) Wir betrachten zunächst den Fall $\boxed{k_i = i}$ (für $i = 1, 2, \ldots, r$). Dann hat die Matrix $B \in \mathrm{M}_{n,n+1}(\mathbb{R})$ die folgende Gestalt

$$\begin{array}{cccc|ccc|c}
1 & 0 & \ldots & 0 & \star & \ldots & \star & \star \\
0 & 1 & \ldots & 0 & \star & \ldots & \star & \star \\
0 & 0 & \ldots & 0 & \star & \ldots & \star & \star \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 1 & \star & \ldots & \star & \star \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
\hline\hline
w_1 & w_2 & \ldots & w_r & w_{r+1} & \ldots & w_n & u
\end{array}$$

Mit B' werde die $(n \times n)$–Matrix bezeichnet, die aus den Spalten $w_1, \ldots, w_n$ aufgebaut ist. Setze

$$v_j := w_j - e_j \quad (j = r+1, \ldots, n)$$

Für $j > r$ sei

$$w_j = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und damit} \quad v_j = w_j - e_j = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei -1 in der j–ten Zeile des Vektors v_j steht. Es gilt nun

$$\begin{aligned} b_1 w_1 + \ldots + b_r w_r + (-1) w_j &= b_1 e_1 + \ldots + b_r e_r + (-1) w_j \\ &= \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) w_j \\ &= w_j + (-1) w_j \\ &= o_n \end{aligned}$$

Damit ist o_n eine Linearkombination der Spalten $w_1, \ldots, w_n$ von B'. Nach (10.9) ist der Vektor v_j eine Lösung des homogenen LGS's $B'x = o_n$, folglich eine Lösung von $T(A)x = o_m$ und schließlich eine Lösung von $Ax = o_m$. Damit ist gezeigt:

$$v_j \in L_0 := \text{Lös}(B', o_n) = \text{Lös}(A, o_m) \quad \text{für alle } j = r+1, \ldots, n$$

Als nächstes überlegen wir uns, daß die Vektoren $v_{r+1}, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.

$$v_{r+1} \;=\; \begin{pmatrix} \star \\ \vdots \\ \star \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; v_{r+2} \;=\; \begin{pmatrix} \star \\ \vdots \\ \star \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \;,\; \ldots \;,\; v_n \;=\; \begin{pmatrix} \star \\ \vdots \\ \star \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Gilt nun $\quad (+) \quad \sum\limits_{j=r+1}^{n} \alpha_j v_j \;=\; o_n$ mit beliebigen Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbb{R}$, so bedeutet dies

$$\begin{pmatrix} \star \\ \vdots \\ \star \\ -\alpha_{r+1} \\ \vdots \\ -\alpha_n \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Folglich sind in (+) alle Koeffizienten gleich 0 , d.h. die Vektoren $v_{r+1}, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig .

Schließlich zeigen wir, daß sich jede Lösung $v = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in L_0$ als Linearkombination von $v_{r+1}, \ldots, v_n$ darstellen läßt. Nach (10.9) gilt

$$\sum_{i=1}^{n} c_i w_i \;=\; o_n \,,$$

da v eine Lösung von $B'x = o_n$ ist. Setze $\alpha_j := -c_j$ für $j > r$ und beachte $w_j = v_j + e_j$ für $j > r$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} o_n \;&=\; \sum_{k=1}^{r} c_k w_k + \sum_{j=r+1}^{n} c_j w_j \\ &=\; \sum_{k=1}^{r} c_k e_k + \sum_{j=r+1}^{n} c_j (v_j + e_j) \\ &=\; \underline{\sum_{k=1}^{r} c_k e_k} + \sum_{j=r+1}^{n} (-\alpha_j) v_j + \underline{\sum_{j=r+1}^{n} c_j e_j} \\ &=\; \sum_{i=1}^{n} c_i e_i - \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_j v_j \\ &=\; v - \sum_{j=r+1}^{n} \alpha_j v_j \end{aligned}$$

Also $\quad v = \sum\limits_{j=r+1}^{n} \alpha_j v_j$.

Damit ist der spezielle Fall vollständig bewiesen. Den allgemeinen Fall können wir durch **Spaltenvertauschungen** auf den speziellen Fall zurückführen. Eine Vertauschung zweier Spalten der Matrix A bedeutet lediglich eine Umnumerierung der Unbekannten des LGS's $Ax = b$ (mache dir das klar!) . Durch Spaltenvertauschungen können wir also immer die Situation des speziellen Falles herstellen, wofür wir das Ergebnis bewiesen haben. Machen wir anschließend die dadurch bedingte Umnumerierung der Unbekannten wieder rückgängig, so haben wir auch den allgemeinen Fall bewiesen.

c) Dies ist eine unmittelbare Folgerung, die sich mit **a)** und **b)** aus (10.11) ergibt.

Bemerkungen:

a) Der Entzerrungsalgorithmus ist ein weitergeführter Gauß–Algorithmus.

b) Für die Lösung des LGS's $Ax = b$ mit Hilfe des Entzerrungsalgorithmus sind entsprechend Satz (10.26) die folgenden Schritte auszuführen:

- Bringe die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ durch elementare Zeilenumformungen auf Treppenform. Das Ergebnis ist eine Matrix $(T(A), b')$ vom Format $(m, n+1)$. An dieser Matrix läßt sich insbesondere ablesen, ob das LGS lösbar ist oder nicht. Im Falle der Lösbarkeit führe die nächsten Schritte aus:

- Füge Nullzeilen ein oder streiche Nullzeilen, so daß aus $(T(A), b')$ eine Matrix B vom Format $(n, n+1)$ entsteht, bei der die Einsen der Spalten mit den charakteristischen Indizes in der Hauptdiagonale stehen.

- Ersetze in der Matrix B die Nullen in der Hauptdiagonale durch -1 . Die entstandene Matrix heiße C.

- Die rechte Spalte von C ist eine spezielle Lösung von $Ax = b$, die Spalten mit -1 in der Haupdiagonalposition bilden eine Basis des Lösungsraumes des homogenen LGS's $Ax = o_m$.

- Bilde die Lösungsmenge von $Ax = b$ entsprechend (10.26c) .