(10.22) SATZ: Rekursive Definition

Ein Ausdruck $E(n)$ ist für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ eindeutig definiert, wenn man

i) $E(0)$ festlegt,

ii) eine Vorschrift angibt, nach der man für alle $n \in \mathbb{N}$ den Ausdruck $E(n+1)$ aus $E(n)$ bestimmen kann.

(10.23) BEISPIELE: a) Die **n–te Potenz** x^n einer reellen Zahl x $(n \in \mathbb{N})$

$x^0 := 1$, $x^{n+1} := x^n \cdot x$

b) Die **Fakultät** $n!$ einer natürlichen Zahl n:

$0! := 1$, $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$

c) Die Summe von endlich vielen reellen Zahlen

Sei $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ eine Folge reeller Zahlen. Die Summe S_n der ersten n Folgenglieder ist definiert durch

$S_0 := 0$, $S_{n+1} := S_n + x_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Bezeichnung: $S_n =: \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$

Entsprechend kann man die Summe von endlich vielen Vektoren in einem Vektorraum definieren.

d) Das Produkt von endlich vielen reellen Zahlen

Sei $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ eine Folge reeller Zahlen. Das Produkt P_n der ersten n Folgenglieder ist definiert durch

$P_0 := 1$, $P_{n+1} := P_n \cdot x_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Bezeichnung: $P_n =: \prod\limits_{k=1}^{n} x_k$

Der Satz (10.22) läßt sich auch noch so verallgemeinern, daß Definitionen folgender Art möglich sind:

e) Die Fibonacci–Zahlen

Die n–te Fibonacci–Zahl F_n $(n \in \mathbb{N})$ ist rekursiv definiert durch

$F_0 := 0$, $F_1 := 1$, $F_{n+1} := F_n + F_{n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Eine **explizite Formel** für die n–te Fibonacci–Zahl ist:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Man kann diese Formel über die "erzeugende Funktion" der Fibonacci–Zahlen finden. Beweisen läßt sie sich leicht mit Hilfe vollständiger Induktion.