Lineare Algebra I (WS 2004/05)

Lösungen 7. Übung

21. Aufgabe: (2+2P) Am günstigsten ist es, die Parameterdarstellung in die Hessesche Normalform zu überführen, und damit den Abstand mit Hilfe des Skalarprodukts zu berechnen. Hierbei können wir den Aufpunkt unverändert bei $\vec{a}$ belassen und der Stellungsvektor berechnet man so: $\vec{e} = \frac{\vec{b}\times\vec{c}}{\|\vec{b}\times\vec{c}\|}$. Der Abstand A von P zu E ist dann gegeben durch dir Formel;

$$A = |\langle \vec{p} - \vec{a}, \vec{e} \rangle|$$

a) $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\| \vec{b} \times \vec{c} \| = 1$, $\vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = 2$.
b) $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\| \vec{b} \times \vec{c} \| = \sqrt{6}$, $\vec{p} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $A = |\frac{1}{\sqrt{6}}((-2)\cdot 4 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot (-2))| = |\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (-6)| = |-\sqrt{6}| = \sqrt{6}$.

22. Aufgabe: (2+2+1P)
a) Wir setzen $E_1 = E_2$: $\vec{x} + r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 = \vec{y} + s_1\vec{w}_1 + s_2\vec{w}_2$, was für die angegebenen Vektoren ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Wir erhalten für jede der drei Koordinaten eine Gleichung:

$$\begin{aligned} 1 + r_1 + r_2 &= -1 + s_1 \\ r_1 - r_2 &= 1 - s_2 \\ 0 &= 1 - s_1 \end{aligned}$$

und nach leichtem Umformen:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= -2 + s_1 \\ s_2 &= 1 + r_2 - r_1 \qquad (*) \\ s_1 &= 1. \end{aligned}$$

Einsetzen der letzten Gleichung in die erste ergibt:

$$r_1 = -1 - r_2$$

welches wiederum durch Einsetzen in (*) ergibt:

$$s_2 = 2 + 2r_2.$$

Wir setzen die gefundenen Ausdrücke für s_1 und s_2 in die Parameterdarstellung von E_2 ein und bekommen:

$$\vec{y} + 1 \cdot \vec{w}_1 + 2 \cdot \vec{w}_1 + r_2 \cdot 2\vec{w}_2,$$

d.h. eine Geradengleichung mit Aufpunkt $\vec{y} + \vec{w}_1 + 2\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Richtungsvektor $2\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man beachte, daß Aufpunkt und Richtungsvektor parallel sind, d.h. die Schnittgerade geht durch den Ursprung.

b) Die Hessesche Normalform wird berechnet wie in Aufgabe 21.

Für E_1: der Aufpunkt kann als $\vec{x}$ gewählt werden, und $\vec{e}_1 = \frac{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Für E_2: der Aufpunkt kann als $\vec{y}$ gewählt werden, und $\vec{e}_2 = \frac{\vec{w}_1 \times \vec{w}_2}{\|\vec{w}_1 \times \vec{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Für den Winkel zwischen den Ebenen E_1 und E_2 berechnen wir das Skalarprodukt der Stellungsvektoren $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$. Es gilt nämlich: $\cos\phi = \langle \vec{e_1}, \vec{e_2} \rangle$, wobei ϕ der von $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ eingeschlossene Winkel ist. Wir berechnen: $\langle \vec{e_1}, \vec{e_2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Für $\phi \in [0, \pi[$ gibt es genau eine Möglichkeit, nämlich $\phi = \frac{\pi}{4}$. Da somit $\phi < \frac{\pi}{2}$, ist dies der spitze Winkel zwischen E_1 und E_2. Der stumpfe Winkel ist demnach $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$.

23. Aufgabe: (1+1+3P)

Wir schreiben $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$.

a) $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-v_2w_3 - (-v_3w_2)) \\ -(-v_3w_1 - (-v_1w_3)) \\ -(-v_1w_2 - (-v_2w_1)) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -v_2w_3 - (-v_3w_2) \\ -v_3w_1 - (-v_1w_3) \\ -v_1w_2 - (-v_2w_1) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -v_2w_3 + v_3w_2 \\ -v_3w_1 + v_1w_3 \\ -v_1w_2 + v_2w_1 \end{pmatrix} =$

$-\begin{pmatrix} v_3w_2 - v_2w_3 \\ v_1w_3 - v_3w_1 \\ v_2w_1 - v_1w_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} w_2v_3 - w_3v_2 \\ w_3v_1 - w_1v_3 \\ w_1v_2 - w_2v_1 \end{pmatrix} = -(\vec{w} \times \vec{v})$

b) $a(\vec{v} \times \vec{w}) = a\begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v_2w_3 - v_3w_2) \\ a(v_3w_1 - v_1w_3) \\ a(v_1w_2 - v_2w_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v_2w_3) - a(v_3w_2) \\ a(v_3w_1) - a(v_1w_3) \\ a(v_1w_2) - a(v_2w_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (av_2)w_3 - (av_3)w_2 \\ (av_3)w_1 - (av_1)w_3 \\ (av_1)w_2 - (av_2)w_1 \end{pmatrix} = (a\vec{v}) \times \vec{w}$.

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_2 + v_2)w_3 - (u_3 + v_3)w_2 \\ (u_3 + v_3)w_1 - (u_1 + v_1)w_3 \\ (u_1 + v_1)w_2 - (u_2 + v_2)w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2w_3 + v_2w_3 - (u_3w_2 + v_3w_2) \\ u_3w_1 + v_3w_1 - (u_1w_3 + v_1w_3) \\ u_1w_2 + v_1w_2 - (u_2w_3 + v_2w_1) \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} u_2w_3 + v_2w_3 - u_3w_2 - v_3w_2 \\ u_3w_1 + v_3w_1 - u_1w_3 - v_1w_3 \\ u_1w_2 + v_1w_2 - u_2w_1 - v_2w_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2w_3 - u_3w_2 + v_2w_3 - v_3w_2 \\ u_3w_1 - u_1w_3 + v_3w_1 - v_1w_3 \\ u_1w_2 - u_2w_1 + v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2w_3 - u_3w_2 \\ u_3w_1 - u_1w_3 \\ u_1w_2 - u_2w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$.

24. Aufgabe: (2P)

$$
\begin{aligned}
(-\vec{v}) \times (-\vec{w}) &= ((-1)\vec{v}) \times (-\vec{w}) \\
&= (-1)(\vec{v} \times (-\vec{w})) && \text{nach Aufgabe 18 a)} \\
&= (-1)(\vec{v} \times ((-1) \cdot \vec{w})) \\
&= (-1) \cdot (-1)(\vec{v} \times \vec{w}) && \text{nach Aufgabe 18 b)} \\
&= 1 \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \\
&= \vec{v} \times \vec{w}.
\end{aligned}
$$