Lineare Algebra I (WS 2004/05)

Lösungen 14. Übung

48. Aufgabe: (2+2P)

a) *Lineare Unabhängigkeit:* Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so daß $\alpha v_1 + \beta v_2 = 0$. Dann gilt komponentenweise: $\alpha + 5\beta = 0$, $\alpha + 0\beta = 0$, $2\alpha + 0\beta = 0$, $5\alpha + \beta = 0$, was nur erfüllt wird für $\alpha = \beta = 0$.

Wir setzen $v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Behauptung:* v_1, v_2, v_3, v_4 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

Beweis: Lineare Unabhängigkeit. Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, so daß $\sum_{i=1}^4 \alpha_i v_i = 0$. Dann erfüllt der Vektor $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$ das homogene Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

Nach Umordnung der Spalten erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = 0$$

und durch Vertauschung von Zeilen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = 0$$

Das Gleichungssystem hat somit obere Dreiecksform und hat $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ als einzige Lösung.

v_1, v_2, v_3, v_4 erzeugen $\mathbb{R}^4$: betrachte die Standardbasis $e_1, \ldots, e_4$ von $\mathbb{R}^4$. Wir haben $v_3 = e_1$ und $v_4 = e_3$. Außerdem gilt: $e_2 = v_1 - 5v_2 + 24v_3 - 2v_4$ und $e_4 = v_2 - 5v_3$, wie man leicht nachrechnet. Da $\mathbb{R}^4$ von den e_i erzeugt wird, sind somit die v_i ebenso Erzeuger des $\mathbb{R}^4$.

b) Wir betrachten $v_1, \ldots, v_4$ als Spaltenvektoren einer Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 3 & 7 \\ 8 & 3 & 2 & 1 \\ 18 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

und suchen eine Lösung des homogenen Gleichungssystems:

$$Ax = 0.$$

Wir ordnen die Zeilen von A um:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 18 & 4 & 5 & 1 \\ 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir subtrahieren das $\frac{8}{6}$-fache der ersten Zeile von der vierten und das 3-fache der ersten Zeile von der dritten:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -20 \\ 0 & \frac{1}{3} & -2 & -\frac{25}{3} \end{pmatrix},$$

dann subtrahieren wir ein Drittel der zweiten Zeile von der vierten und das 2-fache der zweiten von der dritten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{29}{3} \end{pmatrix},$$

und zu guter Letzt subtrahieren wir das $\frac{7}{6}$-fache der dritten von der vierten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{13}{3} \end{pmatrix}.$$

Somit ist das Gleichungssystem in obere Dreiecksform gebracht und es erlaubt somit nur $x = 0$ als Lösung, d.h. $v_1, \ldots, v_4$ sind linear unabhängig.
Behauptung: v_1, v_2, v_3, w bilden eine Basis des $\mathbb{R}^4$.
Beweis: Es genügt zu zeigen, daß v_4 in der linearen Hülle von v_1, v_2, v_3, w liegt. Dies ist äquivalent dazu, daß das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 7 \\ 8x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & = & 1 \\ 18x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 19x_4 & = & 1 \end{array}$$

eine Lösung besitzt. Berechnung nach dem Standardverfahren ergibt die Lösungsmenge:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{23}{42} \\ \frac{10}{21} \\ \frac{29}{7} \\ -\frac{13}{21} \end{pmatrix} \right\},$$

also ist $v_4 \in \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(v_1, v_2, v_3, w)$. qed

50. Aufgabe: (4P)
Wir führen eine vollständige Induktion nach der Dimension von V durch.
Induktionsanfang: Sei $\dim V = 1$, dann gilt für jeden Untervektorraum $W \subset V$, daß $\dim W \in \{0, 1\}$. Ist $\dim W = 0$, so ist $W = \{0\}$, und ist $\dim W = 1$, so ist $W = V$. Also hat jede maximale Folge von Untervektorräumen die Länge 1.
Induktionsvoraussetzung: Für $n > 0$ und einen n-dimensionalen Vektorraum W gilt: $h(W) = \dim W$.
Induktionsschritt: Sei $\dim V = n + 1$ und $V_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq V_r = V$ eine Folge von Untervektorräumen von maximaler Länge. *Behauptung:* $\dim V_{r-1} = n$. Beweis durch Widerspruch: angenommen, $\dim V_{r-1} = s < n$, und $v_1, \ldots, v_s$ eine Basis von V_{r-1}. Dann existieren nach dem Basisergänzungssatz Vektoren $w_{s+1}, \ldots, w_{n+1}$, wobei $n - s > 0$, so daß $v_1, \ldots, v_s, w_{s+1}, \ldots, w_{n+1}$ eine Basis von V bilden. Dann ist jedoch z.B. $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(v_1, \ldots, v_s, w_{s+1})$ ein Untervektorraum von Dimension $s + 1$ von V, der V_{r-1} enthält (aber nicht mit V übereinstimmt), d.h. also, es gibt eine Folge von Untervektorräumen

$$V_1 \subsetneqq \cdots V_{r-1} \subsetneqq \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(v_1, \ldots, v_s, w_{s+1}) \subsetneqq V_r = V,$$

was ein Widerspruch zur Maximalität der Folge $V_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq V_r$ ist. Es folgt also, daß $\dim V_{r-1} = n$. Also: $h(V) = h(V_{r-1}) + 1 = \dim V_{r-1} + 1 = n + 1$. qed

51. Aufgabe: (1+1P)

a) Nach Definition ist $V \times W$ die Menge aller Paare (v, w) wobei $v \in V$ und $w \in W$, wobei die Addition auf $V \times W$ definiert ist als $(v, w) + (v', w') = (v + v', w + w')$, wobei $(v, w), (v', w') \in V \times W$.

Wir stellen zunächst fest, daß $V \times \{0_W\}$ und $\{0_V\} \times W$ Untervektorräume von $V \times W$ sind (d.h. wir sparen uns hier den Beweis nach dem üblichen Schema). Für ein beliebiges Element $(v, w) \in V \times W$ schreiben wir: $(v, w) = (v, 0) + (0, w) \in (V \times \{0_W\}) + (\{0_V\} \times W)$, d.h. $V \times W = (V \times \{0_W\}) + (\{0_V\} \times W)$. Sei nun $(v, w) \in (V \times \{0_W\}) \cap (\{0_V\} \times W)$, dann folgt sofort $v = w = 0$, also ist $(V \times \{0_W\}) \cap (\{0_V\} \times W) = \{0\}$ und somit $V \times W = (V \times \{0_W\}) \oplus (\{0_V\} \times W)$.

b) *Behauptung:* Die Elemente $(v_1, 0), \dots, (v_n, 0)$, $(0, w_1), \dots, (0, w_m)$ bilden eine Basis von $V \times W$ (daraus folgt unmittelbar, daß $\dim(V \times W) = n + m = \dim V + \dim W$).
Beweis: Wir zeigen zunächst, daß die $(v_1, 0), \dots, (v_n, 0)$, $(0, w_1), \dots, (0, w_m)$ linear unabhängig sind. Dazu seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$, so daß $\sum_{i=1}^n \alpha_i(v_i, 0) + \sum_{i=1}^m \beta_i(0, w_i) = 0$. Dann:

$$\begin{aligned} (0,0) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i(v_i, 0) + \sum_{i=1}^m \beta_i(0, w_i) \\ &= \Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^m \beta_i w_i\Big), \end{aligned}$$

also $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ und $\sum_{i=1}^m \beta_i w_i = 0$. Da aber die v_i und w_i Basen von V bzw W sind, folgt, daß $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta_1 = \cdots \beta_m = 0$, also sind die $(v_1, 0), \dots, (v_n, 0)$, $(0, w_1), \dots, (0, w_m)$ linear unabhängig.

Wir zeigen jetzt, daß die $(v_1, 0), \dots, (v_n, 0)$, $(0, w_1), \dots, (0, w_m)$ den Vektorraum $V \times W$ erzeugen. Sei $(v, w) \in V \times W$, dann können wir schreiben: $(v, w) = \big(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^m \beta_i w_i\big)$ für $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$, also: $(v, w) = \big(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^m \beta_i w_i\big) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(v_i, 0) + \sum_{i=1}^m \beta_i(0, w_i)$. qed

52. Aufgabe: (2+2P)

a) Wir zeigen, daß F die Axiome $U1$, $U2$, $U3$ aus Def. 10.13 der Vorlesung erfüllt. Seien $a := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $b := (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Elemente aus F, dann gilt für jedes $n \geq 0$: $a_{n+2} + b_{n+2} = (a_n + a_{n+1}) + (b_n + b_{n+1}) = (a_n + b_n) + (a_{n+1} + b_{n+1})$ und somit $a + b \in F$, d.h. $U1$ ist erfüllt.

Die Nullfolge ist trivialerweise in F enthalten $\Rightarrow U2$.

Seien nun $a \in F$ und $r \in \mathbb{R}$, dann gilt für jedes $n \geq 0$: $r \cdot a_{n+2} = r \cdot (a_n + a_{n+1}) = r \cdot a_n + r \cdot a_{n+1}$, d.h. $r \cdot a \in F$ und somit $U3$ erfüllt.

b) Wir betrachten die Folgen $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die induktiv wie folgt definiert werden:

$$e_0 = 1, \quad e_1 = 0 \quad \text{und} \quad e_{n+2} = e_n + e_{n+1} \text{ für alle } n > 0$$

sowie

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \quad \text{und} \quad f_{n+2} = f_n + f_{n+1} \text{ für alle } n > 0$$

Nach Konstruktion sind beide Folgen in F enthalten. Wir müssen zeigen, daß e und f linear unabhängig sind und F erzeugen.

Lineare Unabhängigkeit: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so daß $\alpha e + \beta f = 0$ (d.h. gleich der Nullfolge), dann gilt komponentenweise:

$$\alpha e_0 + \beta f_0 = 0, \quad \alpha e_1 + \beta f_1 = 0.$$

Da $e_0 = 1, f_0 = 0$ und $e_1 = 0, f_1 = 0$, folgt sofort, daß $\alpha = \beta = 0$, d.h. e und f sind linear unabhängig.

e und f erzeugen F: Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ beliebig. Wir behaupten, daß $a = a_0 \cdot e + a_1 \cdot f$, d.h. daß $a_n = a_0 \cdot e_n + a_1 \cdot f_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion.
Induktionsanfang: Für $n = 0$ gilt: $a_0 \cdot e_0 + a_1 \cdot f_0 = a_0 + 0 = a_0$ und für $n = 1$ gilt: $a_0 \cdot e_1 + a_1 \cdot f_1 = 0 + a_1 = a_1$
Induktionsvoraussetzung: es gelte:

$$a_{n-1} = a_0 \cdot e_{n-1} + a_1 \cdot f_{n-1} \text{ und } a_n = a_0 \cdot e_n + a_1 \cdot f_n$$

für $n > 0$.
Induktionsschritt: wir rechnen:

$$\begin{aligned}
a_0 \cdot e_{n+1} + a_1 \cdot f_{n+1} &= a_0 \cdot (e_n + e_{n-1}) + a_1 \cdot (f_n + f_{n-1}) && \text{da } e, f \in F \\
&= (a_0 \cdot e_n + a_1 \cdot f_n) + (a_0 \cdot e_{n-1} + a_1 \cdot f_{n-1}) \\
&= a_n + a_{n-1} && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
&= a_{n+1} && \text{da } a \in F.
\end{aligned}$$

Damit ist $\{e, f\}$ eine Basis des Untervektorraumes F, und es folgt $\dim F = 2$. qed