9. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA I (WS 2004/05)

Abgabe: Do. 16.12.2004, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1–3 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 4–5 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

29. Aufgabe: Löse folgende Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 21 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ -2x_1 & + & -4x_2 & + & 27x_3 & = & 20 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} \sqrt{3}x_1 & + & 2x_2 & + & \sqrt{5}x_3 & = & 2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & - & (2+\sqrt{5})x_3 & = & 0 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ -4x_1 & - & 5x_2 & - & 7x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & \frac{11}{2}x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}$$

(6)

30. Aufgabe: Die Menge $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ der $(m \times n)$–Matrizen hat die natürliche Struktur eines Vektorraumes. Überzeuge dich davon durch die Überprüfung folgender Vektorraumeigenschaften (siehe auch Definition (4.3) aus der Vorlesung):

a) (A1) Für je zwei Matrizen M_1, M_2 gilt: $M_1 + M_2 = M_2 + M_1$.

b) (A4) Zu jeder Matrix M existiert eine Matrix M', so daß $M + M' = 0$, wobei $0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ die $(m \times n)$–Nullmatrix ist.

c) (SM2) Für zwei reelle Zahlen a, b und eine Matrix M gilt: $(a + b)M = aM + bM$.

Freiwillige Zusatzaufgabe: überzeuge dich davon, daß auch die Eigenschaften (A2), (A3), (SM1), (SM3), und (SM4) erfüllt sind. (4)

31. Aufgabe: Gegeben seien folgende (2×2)–Matrizen:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeige, daß die Matrizen M_1, M_2, M_3, M_4 im Vektorraum $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ linear unabhängig sind.

b) Zeige, daß sich jede (2×2)–Matrix eindeutig als Linearkombination von M_1, M_2, M_3, M_4 darstellen läßt.

Die Matrizen M_1, M_2, M_3, M_4 bilden somit eine *Basis* des Vektorraums $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$.

(4)