8. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA I (WS 2004/05)

Abgabe: Do. 9.12.2004, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1–3 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 4–5 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

25. Aufgabe: Berechne das Spatprodukt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ für die folgenden Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 3+4\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ -17 \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -\frac{1}{121} \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 121 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 104 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7{,}2564 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 8{,}3 \\ 23{,}555 \end{pmatrix}$ (3)

26. Aufgabe: Gegeben sind zwei Geraden, $G_1 : \vec{x} = \vec{0} + r\vec{a}$, $G_2 : \vec{x} = \vec{b} + s\vec{c}$, $r, s \in \mathbb{R}$, wobei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Zeige, daß die Geraden G_1 und G_2 sich nicht schneiden und nicht parallel sind.
b) Berechne $\vec{e} := \frac{\vec{a}\times\vec{c}}{\|\vec{a}\times\vec{c}\|}$.
c) Finde $\alpha, t, \beta \in \mathbb{R}$, so daß $\alpha\vec{a} + t\vec{e} = \vec{b} + \beta\vec{c}$ gilt.
d) Der Wert $t \in \mathbb{R}$ aus Teil **c)** ist der *minimale Abstand* der Geraden G_1 und G_2. Veranschauliche dies mit Hilfe einer Skizze (kein Beweis!). (4)

27. Aufgabe: Sei E eine Ebene, die den Nullpunkt $\vec{0}$ enthält. In Hessescher Normalform sei diese Ebene gegeben durch $\vec{0}$ und einen Stellungsvektor $\vec{e}$. Für jeden Vektor $\vec{v}$ ist seine *Spiegelung an der Ebene E* definiert als $S_E(\vec{v}) := \vec{v} - 2\langle\vec{v}, \vec{e}\rangle\vec{e}$.

a) Veranschauliche $S_E(\vec{v})$ mit Hilfe einer Skizze.
b) Zeige, daß für alle Vektoren $\vec{v}$ gilt: $S_E\big(S_E(\vec{v})\big) = \vec{v}$.
c) Bestimme **alle** Vektoren $\vec{v}$, für die $S_E(\vec{v}) = \vec{v}$ gilt. Begründe deine Antwort. (5)

28. Aufgabe: Sei $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ein *Orthonormalsystem*. Für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ sei eine Ebene E_i in Hessescher Normalform gegeben, die jeweils den Nullvektor $\vec{0}$ enthält und deren Stellungsvektor $\vec{e}_i$ ist. Zu jeder der Ebenen E_i gibt es wie in Aufgabe 27 eine Spiegelung, die wir mit S_i bezeichnen (anstelle von S_{E_i} – wir vereinfachen hier die Notation etwas).

a) Zeige: Für beliebige $i, j \in \{1, 2, 3\}$, die nicht notwendigerweise verschieden sind, gilt $S_i\big(S_j(\vec{v})\big) = S_j\big(S_i(\vec{v})\big)$ für alle Vektoren $\vec{v}$.

b) Sei $\vec{v}$ ein Vektor, der in keiner der drei Ebenen E_i enthalten ist. In wie viele Vektoren kann $\vec{v}$ durch beliebiges mehrfaches Anwenden der Spiegelungen S_1, S_2, S_3 überführt werden (hierbei ist $\vec{v}$ als seine „triviale" Spiegelung mitzuzählen)? (4)