14. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA I (WS 2004/05)

Abgabe: Do. 3.2.2005, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1–3 : Fach Nr. 11 (oranger Schrank Ebene D1)

Gruppen 4–5 : Fach Nr. 13 (oranger Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

48. Aufgabe: **a)** Betrachte die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Zeige, daß $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig ist und ergänze $\{v_1, v_2\}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

b) Betrachte die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \\ 18 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeige, daß $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ linear unabhängig ist. Sei $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 19 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Tausche w mit einem der v_i aus, so daß man wieder eine Basis von $\mathbb{R}^4$ erhält. (4)

50. Aufgabe: Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Wir definieren $h(V)$ als die maximale Länge von Folgen von Untervektorräumen $V_1, \dots, V_r$ von V, so daß gilt:

$$\{0\} \subsetneqq V_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq V_r = V.$$

Zeige: $h(V) = \dim V$. (4)

51. Aufgabe: Seien V, W Vektorräume.

a) Zeige: $V \times W = (V \times \{0_W\}) \oplus (\{0_V\} \times W)$.

b) Seien V und W endlich-dimensional und $\{v_1, \dots, v_n\}$ und $\{w_1, \dots, w_m\}$ Basen von V bzw. von W. Gib eine Basis von $V \times W$ an (natürlich mit Begründung!) und bestimme die Dimension von $V \times W$. (3)

52. Aufgabe: Die Teilmenge $F \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R})$ bestehe aus den reellen Folgen $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, für die gilt: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

a) Zeige, daß F ein Untervektorraum des Folgenraumes $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ ist.

b) Bestimme eine Basis von F. Welche Dimension hat F? (4)

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/~chris

Klausurtermin: Fr, 11.2.2005, 9.00–12.00 Uhr