12. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA I (WS 2004/05)

Abgabe: Do. 20.1.2005, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1–3 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 4–5 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

40. Aufgabe: Sind folgende Teilmengen T des $\mathbb{R}^4$ Untervektorräume? Gib jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an (hierbei ist x jeweils der Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$).

a) $T = \{x \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

b) $T = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$

c) $T = \{x \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ und } x_3 + x_4 = 0\}$

d) $T = \{x \mid (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) = 0\}$ (4)

41. Aufgabe: E und F seien beliebige Teilmengen eines Vektorraumes V. Beweise die folgenden Eigenschaften der linearen Hülle:

a) $E \subseteq F \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(F)$.

b) $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E) = \sum_{v \in E} \mathbb{R}v$.

c) $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)) = \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$.

d) Ist $U \subseteq V$, so ist U genau dann ein Untervektorraum von V, wenn $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U) = U$ gilt. (5)

42. Aufgabe: Zeige in den folgenden Fällen, daß die Teilmenge T des Vektorraumes $M_n(\mathbb{R})$ ein Untervektorraum ist und bestimme linear unabhängige Matrizen $E_1, \ldots, E_s \in T$, so daß sich jede Matrix aus T als Linearkombination von $E_1, \ldots, E_s$ darstellen läßt .

a) Sei $n = 2$, und sei T die Menge der symmetrischen (2×2)-Matrizen, d.h. $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \in T$ genau dann, wenn $a_{12} = a_{21}$.

b) Sei $n \geq 2$ beliebig, und sei T die Menge der symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen, d.h. $A = (a_{ik}) \in T$ genau dann, wenn $a_{ik} = a_{ki}$ für alle $1 \leq i, k \leq n$. (4)

43. Aufgabe: Zeige: Sind V und W Vektorräume, dann ist auch das kartesische Produkt $V \times W$ ein Vektorraum. Dabei sind die Rechenoperationen auf $V \times W$ “komponentenweise” definiert, d.h. für $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \times W$ und $r \in \mathbb{R}$ setzt man:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

$$r\,(v_1, w_1) := (rv_1, rw_1) \qquad (2)$$

Internet: http://math-www.uni-paderborn.de/˜chris

Klausurtermin: Fr, 11.2.2005, 9.00–12.00 Uhr