12. Übungsblatt

## LINEARE ALGEBRA I (WS 2004/05)

**Abgabe: Do. 20.1.2005, bis 13.00 Uhr**

Gruppen 1–3 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 4–5 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

**40. Aufgabe:** Sind folgende Teilmengen $T$ des $\mathbb{R}^4$ Untervektorräume? Gib jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an (hierbei ist $x$ jeweils der Vektor $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right)$).

**a)** $T = \{x \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

**b)** $T = \{x \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$

**c)** $T = \{x \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ und } x_3 + x_4 = 0\}$

**d)** $T = \{x \mid (x_1 - x_2)(x_3 - x_4) = 0\}$ (4)

**41. Aufgabe:** $E$ und $F$ seien beliebige Teilmengen eines Vektorraumes $V$. Beweise die folgenden Eigenschaften der linearen Hülle:

**a)** $E \subseteq F \Rightarrow \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E) \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(F)$.

**b)** $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E) = \sum_{v \in E} \mathbb{R}v$.

**c)** $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)) = \mathcal{L}_{\mathbf{R}}(E)$.

**d)** Ist $U \subseteq V$, so ist $U$ genau dann ein Untervektorraum von $V$, wenn $\mathcal{L}_{\mathbf{R}}(U) = U$ gilt. (5)

**42. Aufgabe:** Zeige in den folgenden Fällen, daß die Teilmenge $T$ des Vektorraumes $M_n(\mathbb{R})$ ein Untervektorraum ist und bestimme linear unabhängige Matrizen $E_1, \ldots, E_s \in T$, so daß sich jede Matrix aus $T$ als Linearkombination von $E_1, \ldots, E_s$ darstellen läßt.

**a)** Sei $n = 2$, und sei $T$ die Menge der symmetrischen $(2 \times 2)$-Matrizen, d.h. $A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right) \in T$ genau dann, wenn $a_{12} = a_{21}$.

**b)** Sei $n \geq 2$ beliebig, und sei $T$ die Menge der symmetrischen $(n \times n)$-Matrizen, d.h. $A = (a_{ik}) \in T$ genau dann, wenn $a_{ik} = a_{ki}$ für alle $1 \leq i, k \leq n$. (4)

**43. Aufgabe:** Zeige: Sind $V$ und $W$ Vektorräume, dann ist auch das kartesische Produkt $V \times W$ ein Vektorraum. Dabei sind die Rechenoperationen auf $V \times W$ "komponentenweise" definiert, d.h. für $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \times W$ und $r \in \mathbb{R}$ setzt man:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$$

$$r\,(v_1, w_1) := (rv_1, rw_1) \qquad (2)$$

---

**Internet:** http://math-www.uni-paderborn.de/~chris

# Klausurtermin: Fr, 11.2.2005, 9.00–12.00 Uhr