11. Übungsblatt

LINEARE ALGEBRA I (WS 2004/05)

Abgabe: Do. 13.1.2005, bis 13.00 Uhr

Gruppen 1–3 : Fach Nr. 11 (orangener Schrank Ebene D1)

Gruppen 4–5 : Fach Nr. 13 (orangener Schrank Ebene D1)

Schreiben Sie auf die erste Seite **gut** leserlich Namen, Vornamen, Matrikel–Nr. und Nr. Ihrer Übungsgruppe. Heften Sie die Seiten zusammen!

36. Aufgabe: Löse das LGS $Ax = b$ mit dem Entzerrungsalgorithmus, wobei:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 & -17 & -6 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & 1 & 24 & 8 & 0 & 30 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 11 & 2 & 0 & 10 \\ -1 & -2 & -1 & -10 & -4 & 0 & -4 \\ 3 & 6 & -1 & 18 & 4 & 1 & 22 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -25 \\ 34 \\ 2 \\ 11 \\ -16 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

(3)

37. Aufgabe: Beweise oder widerlege: die Gleichungssysteme G_1 und G_2 haben die gleiche Lösungsmenge.

a) $G_1 : \begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ & & 4x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \qquad G_2 : \begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ 7x_1 & + & 11x_2 & + & 8x_3 & = & 4 \\ -2x_1 & & & + & x_3 & = & -1 \end{array}$

b) $G_1 : \begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 7x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & = & 11 \end{array} \qquad G_2 : \begin{array}{rcrcrcr} 12x_1 & + & 6x_2 & + & 9x_3 & = & 12 \\ \frac{5}{2}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & 2x_3 & = & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2}x_1 & - & \frac{1}{2}x_2 & - & 2x_3 & = & -\frac{1}{2} \end{array}$

c) $G_1 : \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 5 \\ 7x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & = & 6 \end{array} \qquad G_2 : \begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 7x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & = & 5 \end{array}$

(6)

38. Aufgabe: Beweise mit Hilfe von vollständiger Induktion:

a) Sei V ein Vektorraum, $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $r \cdot \sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n r \cdot v_i$.

b) Sei V ein Vektorraum und U eine nichtleere Teilmenge von V. Dann gilt: U ist ein Untervektorraum von V genau dann wenn für alle $v_1, \ldots v_n \in U$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ gilt: $\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i \in U$.

c) Seien gegeben $r > 0$ und r Gleichungssysteme $G_i : A_i x = b_i$ für $i = 1, \ldots, r$, wobei die A_i $(m_i \times n_i)$-Matrizen sind und $b_i = \begin{pmatrix} b_{i1} \\ \vdots \\ b_{im_i} \end{pmatrix}$. Sind $y_i = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ \vdots \\ y_{1n_i} \end{pmatrix}$ Lösungen der Gleichungssysteme G_i, dann ist der Vektor

b.w.

$$y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \\ \vdots \\ y_{rn_r} \end{pmatrix}$$ eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$, wobei A die zusammengesetzte

$$\text{Matrix } A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & & A_r \end{pmatrix} \text{ ist und } b = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1m_1} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{2m_2} \\ \vdots \\ b_{rm_r} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

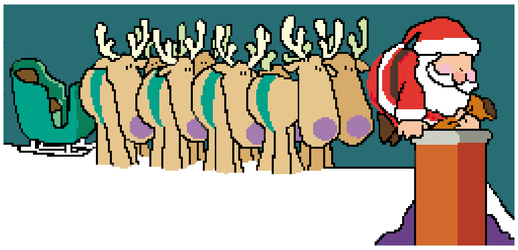
39. Aufgabe: **(zusätzliche Weihnachtsaufgabe)** Wir betrachten das Gleichungssystem

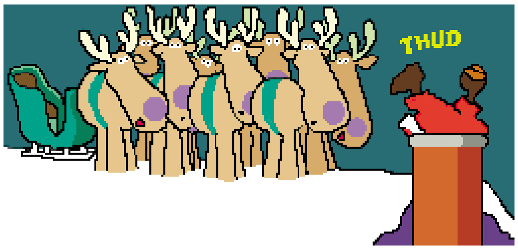
$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array}$$

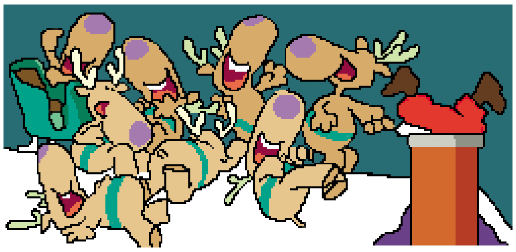
so daß für $j = 1, \dots, n$ folgende Bedingungen gelten:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}| < |a_{jj}|.$$

Zeige, dass das Gleichungssystem nur die triviale Lösung besitzt (**Hinweis:** betrachte eine Lösung $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ und wähle $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ so, daß $|z_{k_0}|$ maximal ist. Verwende folgende Ungleichungen: für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $|x + y| \leq |x| + |y|$ und $|x + y| \geq |x| - |y|$). $(\star\star\star\star\star)$







Frohe Weihnachten und ein gutes Neues Jahr!